Неблуждающее множество

Материал из Википедии — свободной энциклопедии [править | править код]

В теории динамических систем, **неблуждающее множество** — один из вариантов определения аттрактора, формализующий описание «точка несущественна для аттрактора, если у неё есть окрестность, которую каждая орбита посещает не больше одного раза».

Содержание [скрыть]

Определение [править | править код]

Точка x динамической системы называется **блуждающей**, если итерации некоторой её окрестности U никогда эту окрестность не пересекают:

$$\forall n > 0 \quad f^n(U) \bigcap U = \emptyset.$$

Иными словами, точка блуждающая, если у неё есть окрестность, которую любая траектория может пересечь только один раз. Множество всех точек, не являющихся блуждающими, называется **неблуждающим** множеством.

Свойства [править | править код]

- Неблуждающее множество является замкнутым инвариантным относительно динамики множеством.
- Неблуждающее множество содержит все неподвижные и периодические точки системы.
- Неблуждающее множество содержит носитель любой инвариантной меры.

4) Во избежание недоразумений формулируем точное определение блуждающих и неблуждающих точек, относящееся ко всем случаям.

Точка P_0 называется *блуждающей*, если существует открытое множество σ_0 и вещественное число t_1, такие, что σ_0 содержит P_0 и что σ_t не имеет общих точек с σ_0 при всяких $t > t_1$. В противном случае точка P_0 называется *неблуждающей*.

асимптотически.

§ 2. Блуждающие и неблуждающие движения. Рассмотрим произвольную точку P_0 многообразия состояний движения M. Пусть σ будет открытое связное множество малого диаметра ε[2], содержащее P_0[3]. При возрастании времени t эта «частица» σ движется. Может случиться, что P_0 представляет состояние равновесия; в этом

---

[1]«Mèthodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. 3, гл. 26.

[2]Очевидно, что в M можно определить расстояние надлежащим образом. Диаметром совокупности точек будет тогда просто верхняя грань расстояний двух точек этой совокупности.

случае частица σ все время будет содержать P_0; временно мы исключим этот случай из рассмотрения. Во всяком другом случае σ через некоторое время придет в положение, не имеющее общих точек с ее первоначальным положением σ_0, если только σ_0 достаточно мало; это следует из того, что составляющие скорости dx_i/dt для всех точек частицы приблизительно такие же, как для P_0. Если можно выбрать ε настолько малым, чтобы σ после этого никогда не налегала на свое первоначальное положение, то мы будем называть P_0 «блуждающей точкой» и соответственное движение «блуждающим движением».

В противном случае точку P_0 мы будем называть «неблуждающей точкой» и соответственное движение «неблуждающим движением». Неблуждающими мы будем, разумеется, называть также точки равновесия и соответственные вырождающиеся «движения»([4]).

В этих определениях имеется кажущаяся асимметрия между направлениями возрастания и убывания времени t. Но легко видеть, что фактически нет никакой асимметрии. Действительно, если частица σ налегает на свое первоначальное положение σ_0 через промежуток времени τ, то она ведет себя так же через промежуток времени $-\tau$; потому что, если частицы σ_0 и σ_τ, налегают друг на друга, то $\sigma_{-\tau}$ и σ_0, очевидно, тоже налегают друг на друга.

Таким образом, блуждающая точка P_0 характеризуется тем, что соответственная частица σ описывает n-мерную трубку, нигде не пересекающую самое себя, когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$([5]). По этой причине название «блуждающая» представляется законным, так как точка никогда не возвращается в бесконечно малую окрестность какой-нибудь раз пройденной точки([6]).

Совокупность W всех блуждающих точек многообразия представляет собой открытую совокупность, состоящую из кривых движения. Совокупность M_1 неблуждающих точек M состоит из дополнительной замкнутой совокупности кривых движения([7]).

Из того, что было сказано выше, сразу следуют все части этого утверждения, кроме разве того, что W открыто и, следовательно, M_1 замкнуто. Но если P_0 есть блуждающая точка, то таковыми, очевидно, будут все точки частицы σ, содержащей P_0([8]). Отсюда тотчас же следует, что W — открытая совокупность и, значит, M_1 — замкнутая совокупность.

Если совокупность M содержит точки, не являющиеся предельными точками совокупности W, то эти точки образуют подмножество M_1' множества M_1, состоящее из кривых движения и обладающее свойством региональной рекуррентности.

Очевидно, что M_1' состоит из кривых движения, потому что если какая-нибудь точка Q совокупности M_1 не находится в непосредственном соседстве ни с какой кривой движения, принадлежащей W, то то же самое будет справедливо относительно любой точки кривой движения, проходящей через Q(9). Мы видим также, что достаточно малая частица, содержащая Q, будет вся содержаться в M_1', так что M_1' является открытой совокупностью неблуждающих точек. Отсюда следует свойство региональной рекуррентности.

Очевидно, что совокупность $M_1'' = M_1 - M_1'$ представляет собою просто границу открытых n-мерных совокупностей W, M_1'(10). Она является состоящим из кривых движения замкнутым множеством размерности, меньшей n.

С возрастанием или убыванием времени любая блуждающая точка приближается асимптотически к совокупности M_1.

Это основное свойство блуждающих движений доказывается очень просто. Рассмотрим любую открытую окрестность множества M_1 и дополнительную замкнутую совокупность C, состоящую исключительно из блуждающих точек. Около каждой точки, принадлежащей C, может быть построена маленькая частица σ, которая при своем движении никогда не будет налегать на свое первоначальное положение. Следовательно, можно найти конечное число таких частиц, покрывающих полностью C. Движущаяся точка может войти в одну из таких частиц, которые мы считаем неподвижными, только однажды и оставаться там короткий промежуток времени. Отсюда очевидно, что она по истечении некоторого конечного промежутка времени будет оставаться в данной окрестности совокупности M_1. Следовательно, всякая движущаяся точка будет приближаться асимптотически к M_1, что и требовалось доказать.

Более внимательное изучение обнаруживает некоторые дальнейшие особенности способа приближения блуждающих движений к неблуждающим движениям. Так как в предыдущем рассуждении движущаяся точка входила в какую-нибудь из неподвижных частиц, покрывающих C, только однажды и оставалась там в течение короткого промежутка времени, то мы сможем высказать следующее положение.

Всякое блуждающее движение остается вне какой-нибудь выбранной окрестности совокупности M_1 в течение конечного времени T и покидает эту окрестность конечное число N раз, где N и T равномерно ограничены, коль скоро окрестность множества M_1 выбрана[1](11).

§ 3. Последовательность M, M_1, M_2, **. . . .** Придя к замкнутой совокупности M_1(12), между точками которой расстояние может быть

[1]Для того, чтобы сделать счет выводов точным, мы должны были бы выбрать покрывающие частицы таким образом, чтобы каждая из них отсекала самое большее один отрезок от каждой кривой движения, и затем рассматривать, гак окрестность совокупности M_1, дополнение к сумме этих частиц.